

Borda vs. Condorcet

- Jean-Charles **Chevalier de Borda** (1733 – 1799)
 - ▶ Mathematiker, Physiker und Seefahrer
 - ▶ War an der Konstruktion des “Ur-Meters” beteiligt ($1/10.000.000$ des Abstands zwischen Nordpol und Äquator)
- Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, **Marquis de Condorcet** (1743 – 1794)
 - ▶ Philosoph und Mathematiker
 - ▶ Früher Verfechter des Frauenwahlrechts und Gegner der Todesstrafe



Bordas Vorschlag

- ▶ Wir nehmen im folgenden an, dass alle individuellen Präferenzen strikt sind.
- ▶ m ist die Anzahl der Alternativen, n die Anzahl der Wähler.
- Familie der Punkteverfahren
 - ▶ Def.: Eine SCC ist ein **Punkteverfahren** wenn es einen Vektor $s=(s_1, \dots, s_m)$ mit $s_1 \geq \dots \geq s_m$ und $s_1 > s_m$ gibt, so dass immer die Alternativen mit den meisten aufsummierten Punkten gewinnen wenn jeder Wähler seiner Alternative an der i . Position s_i Punkte gibt.
 - ▶ Beispiele
 - **Borda**: $s=(m-1, m-2, \dots, 0)$
 - Die Punktzahl, die ein Wähler einer Alternative gibt, entspricht der Anzahl der Alternativen die er niedriger einstuft.
 - Borda schlug dieses Verfahren 1770 der französischen Akademie der Wissenschaften vor, die es daraufhin 20 Jahre verwendete bis Napoleon Bonaparte es abschaffte.
 - **Mehrheitswahl** (“plurality”): $s=(1, 0, \dots, 0)$
 - **“anti-plurality”**: $s=(1, \dots, 1, 0)$

Condorcets Vorschlag

- Familie der Condorcet-Verfahren

- ▶ Def.: Eine Alternative a ist ein **Condorcet-Gewinner**, wenn sich für jede andere Alternative b eine Mehrheit finden lässt, die a gegenüber b bevorzugt.
- ▶ Def.: Eine SCC f erfüllt die **Condorcet-Bedingung** oder ist **Condorcet-konsistent**, wenn $f(.)=\{a\}$ falls a ein Condorcet-Gewinner ist.
- ▶ Beispiel
 - Minimax-Verfahren: Das Minimax Verfahren wählt diejenigen Alternativen aus, für die das schlechteste Ergebnis eines paarweisen Vergleichs am besten ausfällt.

$$f(\succ_1, \dots, \succ_n) = \arg \max_{a \in A} \min_{b \in A} |\{i \in N \mid a \succ_i b\}|$$

4	2	1
A	B	B
B	C	A
C	A	C

→ Vergleichsmatrix und Dominanzgraph an der Tafel

Punkte- und Condorcet-Verfahren

- Bei nur zwei Alternativen und ungerade vielen Wählern ist **Mehrheitswahl** das einzige Punkteverfahren und das einzige Condorcet-Verfahren.
- Proposition (Condorcet, 1785): Das Borda-Verfahren erfüllt nicht die Condorcet-Eigenschaft.
- Satz (Fishburn, 1973): Kein Punkteverfahren erfüllt die Condorcet-Eigenschaft.
 - ▶ Beweis: Tafel.

	6	3	4	4
s ₁	A	C	B	B
s ₂	B	A	A	C
s ₃	C	B	C	A

Eigenschaften des Borda-Verfahrens

- Borda nimmt eine besondere Rolle unter den Punkteverfahren ein.
 - ▶ Satz (**Smith, 1973**): Ein Condorcet-Gewinner ist niemals die Alternative mit den wenigsten Punkten im Borda-Verfahren. Für jedes andere Punkteverfahren auf mehr als zwei Alternativen gilt diese Aussage nicht!
 - ▶ Satz (**Gehrlein et al., 1978**): Von allen Punkteverfahren maximiert das Borda-Verfahren die Wahrscheinlichkeit, dass ein Condorcet-Gewinner ausgewählt wird, falls ein solcher existiert.
 - ▶ Es existieren mehrere elegante **axiomatische Charakterisierungen** des Borda-Verfahrens.
- Gibt es ein Verfahren, das die Vorzüge von Condorcet und Borda vereint?

Konsistenz

- Def.: Eine SCC f ist **konsistent**, wenn für zwei disjunkte Mengen von Wählern $N_1, N_2 \subset N$ gilt:

$$f(N_1) \cap f(N_2) \neq \emptyset \implies f(N_1 \uplus N_2) = f(N_1) \cap f(N_2)$$

wobei $f(S) = f((\succsim_i)_{i \in S})$ für $S \subseteq N$.

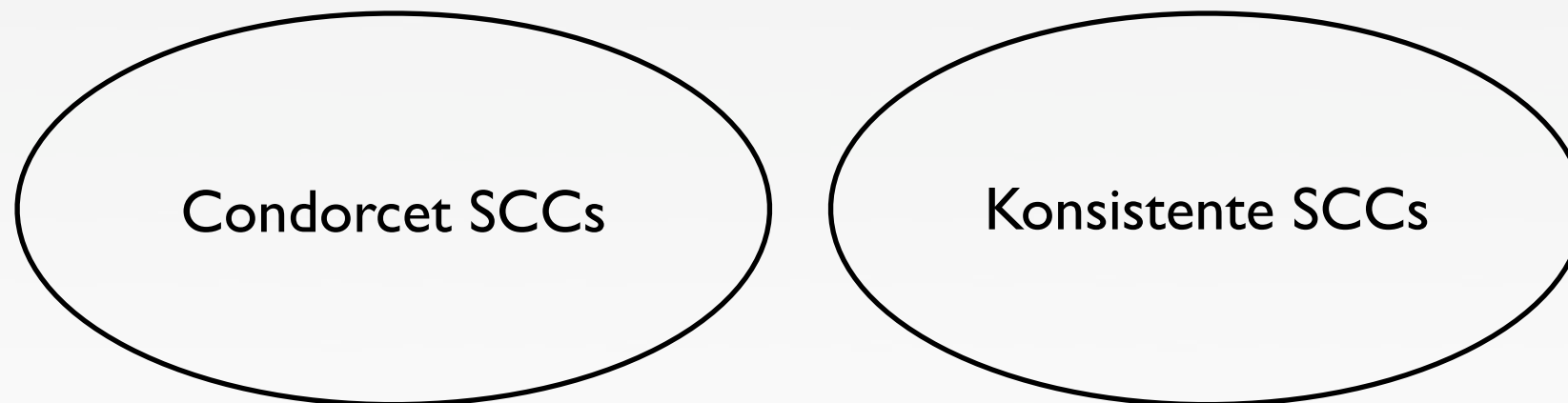
- ▶ Wenn zwei verschiedene Gruppen von Wählern einen Konsens erreichen, sollte dieser Konsens auch für die Allgemeinheit gelten.
- Satz (Young et al., 1978): Keine Condorcet-konsistente SCC auf mehr als zwei Alternativen ist konsistent.
 - ▶ Beweis: Tafel.

Charakterisierung von Punkteverfahren

- Def.: Eine SCC f ist **kontinuierlich**, wenn es für alle N_1 und N_2 mit $f(N_1)=\{a\}$ und $f(N_2)=\{b\}$, ein k gibt, so dass $f(kN_1 \cup N_2)=\{a\}$.
 - ▶ Eine verschwindend kleine Gruppe von Wählern soll keinen Einfluss auf das Wahlergebnis haben.
- Satz (Young, 1975): Eine SCC ist genau dann ein Punkteverfahren wenn sie neutral, anonym, konsistent und kontinuierlich ist.
 - ▶ Beweis:
 - “von links nach rechts”: trivial.
 - “von rechts nach links”: schwer.
 - ▶ Vgl. axiomatische Charakterisierung der Mehrheitswahl (Satz von May)

SCC Dichotomie

- 200 Jahre nach Borda und Condorcet stellte sich heraus, dass die Grundprinzipien von Borda und Condorcet für SCCs unvereinbar sind!
- Für mehr als zwei Alternativen gilt:



- Ausblick: Für SWFs befindet sich in der Schnittmenge genau ein Verfahren!

Maximum-Likelihood Methode

- Probabilistisches Modell
 - ▶ Es existiert eine “korrekte” soziale Präferenzrelation.
 - ▶ Jeder Wähler entscheidet sich mit derselben Wahrscheinlichkeit $0,5 < p < 1$ für einen “korrekten” paarweisen Vergleich.
 - ▶ Beispiel: Jury, die über *schuldig* oder *nicht schuldig* entscheiden muss.
- Satz (Shapley et al., 1984): Von allen SCCs auf zwei Alternativen liefert **Mehrheitswahl** mit der größten Wahrscheinlichkeit das “korrekte” Ergebnis.
- Satz (Young, 1988): Die Maximum-Likelihood SCCs auf mehr als zwei Alternativen sind
 - ▶ $p \rightarrow 1$: **Minimax-Verfahren**, und
 - ▶ $p \rightarrow 0,5$: **Borda-Verfahren**.

Algorithmische Aspekte

- **Punkteverfahren** können einfach berechnet werden.
 - ▶ Komplexität ist polynomiell in m und n .
- **Condorcet-Verfahren** sind eine Familie von Verfahren mit weniger Struktur und können sowohl einfach als auch schwer zu berechnen sein.
 - ▶ Für den Rest der Vorlesung werden wir uns ausschließlich mit Condorcet-Verfahren beschäftigen.